Билет 1)

*Определение и свойства верхнего и нижнего интегралов (21 – 25)*

**Опр.** Разбиением отрезка называют набор , где . Отрезки , , , называют *частичными отрезками* разбиения . Максимальную из длин () этих отрезков обозначают и именуют *диаметром разбиения* .

Числа и называют верхней и нижней суммами Дарбу.

Изображение выглядит как линия, Красочность, диаграмма, Графика

Контент, сгенерированный ИИ, может содержать ошибки.

Нижняя (зеленая) и верхняя (серая) суммы Дарбу на 4 отрезках разбиения

Свойство: . Из этого следует что достаточно изучить свойства лишь верхних сумм Дарбу.

**Лемма 1**: Если разбиение предшествует разбиению то .

**Лемма 2**: Пусть получается из разбиения *T* добавлением p новых точек деления. Тогда

Также важным является неравенство

В силу неравенства (1) совокупность верхних и нижних сумм Дарбу есть ограниченное числовое множество.

– верхний интеграл функции *f*

– нижний интеграл функции *f*

Иными словами, верхний интеграл это наименьшая (т.е. самая точная) из всевозможных верхних сумм Дарбу. Нижний интеграл это наибольшая (т.е. самая точная) из всевозможных нижних сумм Дарбу.

Свойство: просто нужно иметь ввиду

**Лемма 3**: Для любого найдется такое , что

Краткая запись

**Свойства**:

Ниже — ограниченные на функции, , . Отметим следующие свойства верхнего интеграла

1. (неравенство треугольника);
2. (положительная однородность);
3. Если , то (монотонность);
4. Если , — верхние интегралы от сужений функции на отрезки и соответственно, то (аддитивность).
5. для любой константы (нормировка).

**Замечание**. Пусть , и

Тогда ,

Билет 2)

*Определение интеграла Римана. Критерий Римана интегрируемости (25 - 30)*

Ограниченную функцию называют интегрируемой по Риману если . Общее обозначение называют интегралом Римана функции по отрезку и обозначают

Класс интегрируемых по Риману функций обозначается как .

**Теорема 1**: (Критерий Римана). Ограниченная функция интегрируема по Риману в том и только случае, если для любого найдётся такое разбиение T отрезка, что

**Замечание 1**: Если — разбиение отрезка , то

где , , , , — колебание функции на отрезке , .

Поэтому критерий Римана равносилен оценке:

**Замечание 2**: Ограниченная функции интегрируема по Риману в том и только в том случае, если для каждой последовательности разбиения отрезка , такой, что , справедливо равенство

Общие значения этих пределов совпадает с

Билет 3)

*Интегрируемость непрерывных и монотонных функций (26 - 27)*

**Теорема 1**: Каждая непрерывная на отрезке [a, b] функция интегрируема по Риману ().

▲ В силу теорем Вейерштрасса и Кантора непрерывная функция ограничена и равномерно непрерывна. Фиксируем и подберем такое , что из условий , следует, что . Если  — такое разбиение отрезка , что , то колебания функции на каждом из отрезков () меньше . Следовательно,

т.е. выполнен критерий Римана, поэтому . ▲

**Теорема 2**: Монотонная на отрезке [a, b] функция интегрируема.

▲ Пусть (для определенности) функция возрастает. Если — разбиение отрезка [a, b], то колебание функции на отрезке равно (). Следовательно,

Фиксируем и подберем так, что . Если , то оценка выше говорит о том, что . Поэтому . ▲

Билет 4)

*Операции над интегрируемыми функциями. Свойства интеграла (28 - 29)*

**Теорема**. Пусть и . Пусть функция удовлетворяет условию Липшица.

Тогда .

**Следствие 1**. Если , то функции также являются непрерывными по Риману.

**Теорема**. Сумма (разности) двух непрерывных функций также является непрерывной функцией.

**Лемма** 5. Если и , то

(Свойство монотонности интеграла Римана).

**Следствие 1**.

**Следствие 2**. Пусть , и . Тогда

.

**Теорема**. Пусть , и . Тогда найдется такое число из отрезка , что

Билет 5)

*Интеграл с переменным верхним пределом (31 - 33)*

**Лемма**. Если , то сужения функции на отрезки , () принадлежат классам и . Обратно, если сужения функции на и принадлежат и , то .

**Следствие 1**.

**Следствие 2**. Пусть и пусть — функция, интегрируемая на наибольшем из отрезков с концами в указанных точках. Тогда сужение на каждый из двух других отрезков также интегрируемо и имеет место равенство .

Если (), то функцию

называют **интегралом с переменным верхним пределом**. Очевидно, что

**Теорема**. Функция удовлетворяет условию Липшица

здесь , и — любые точки из [a, b].

▲ Если , то

В силу аддитивности интеграла. Поэтому

что и приводит к оценке (2). ▲

**Теорема**. Если функция непрерывна в точке из , то определяемая равенством (1) функция дифференцируема в точке и .

**Следствие 1**. Если , то — первообразная функции .

**Следствие 2**. У любой непрерывной на отрезке функции существует первообразная.